Lemma. (Zornsches Lemma)
Sei P eine halbgeordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge T eine obere Schranke in P hat. Dann enthält P ein maximales Element m.

In den Zermelo-Fraenkel Mengenaxiomen ist das Zornsche Lemma äquivalent zum Auswahlaxiom. (Insbesondere gilt das Lemma also in ZFC.) Dies beweisen wir nicht, statt dessen skizzieren wir die Definition der einzelnen Begriffe:

- *halbgeordnete Menge P:* Auf P ist eine Relation „$\le$“ definiert, aber nicht alle Paare von Elementen in P sind durch die Relation vergleichbar. (Beispiel: Teilmengen einer Menge M mit „$\subset$“.)
- *total geordnete Teilmenge T:* $T \subset P$ und jedes Paar $a, b \in T$ erfüllt $a \le b$ oder $b \le a$. (Beispiel: eine aufsteigende Folge $u_1 \subset u_2 \subset u_3 \subset \cdots \subset M$.)
- *obere Schranke:* Es gibt $s \in P$ mit $a \le s$ für alle $a \in T$. Insbesondere ist jedes $a \in T$ mit s vergleichbar. (Beispiel: $s = \bigcup_i u_i \subset M$.)
- *maximales Element m:* Für ein maximales Element $m \in P$ gilt: aus $m \le p$ für ein $p \in P$ folgt $m = p$. Wenn p und m nicht vergleichbar sind, gibt es keine Bedingung. Insbesondere folgt *nicht*, dass $p \le m$ für alle $p \in P$.

Bemerkung: Eine mögliche Wahl für T ist die leere Menge. Die Voraussetzungen im Zornschen Lemma verlangen, dass es auch hierfür eine obere Schranke in P gibt. Somit darf P nicht leer sein. (Daher muss $P \neq \emptyset$ nicht separat gefordert werden. Jedes Element von P ist eine obere Schranke für $T = \emptyset$.)

Es folgen zwei Sätze aus der Vorlesung, deren Beweis mit dem Zornschen Lemma geführt wird.

Satz. Ein kommutativer Ring $A \neq \{0\}$ hat ein maximales Ideal.

Beweis. Sei $P = \{I \subset A \mid I \text{ Ideal mit } I \neq A\ \}$. Es gilt auch

$$P = \{I \subset A \mid I \text{ Ideal mit } 1_A \notin I\ \}\ .$$

(Warum?) Auf P betrachte die Halbordnung „$\subset$“. Da $A \neq \{0\}$ ist $\{0\} \in P$ und somit ist P nicht leer.

Sei $T \subset P$ eine total geordnete Teilmenge. Falls $T = \emptyset$ ist jedes $I \in P$ eine obere Schranke. Falls $T \neq \emptyset$, setze $S := \bigcup_{J \in T} J$. Dann ist $S \subset A$ ein Ideal in A (Warum?) mit $1_A \neq S$ (da 1_A in keinem $J \in T$ enthalten war). Also $S \in P$ und $J \subset S$ für alle $J \in T$. Somit hat jede total geordnete Teilmenge von P eine obere Schranke.

Nach dem Zornschen Lemma enthält P ein maximales Element $M \in P$. Per Konstruktion gilt nun $M \subsetneq A$ und jedes Ideal I mit $M \subset I \subsetneq A$ erfüllt $M = I$. Also ist M ein maximales Ideal. □

Satz. Seien K, M Körper mit M algebraisch abgeschlossen, und sei $\sigma : K \to M$ ein Körperhomomorphismus. Für jede algebraische Körpererweiterung L/K existiert eine Fortsetzung $\tilde{\sigma} : L \to M$ von σ.

Bemerkung: Dass $\tilde{\sigma}$ eine Fortsetzung von σ ist, bedeutet, dass $\tilde{\sigma}$ ein Körperhomomorphismus ist, der $\tilde{\sigma}|_K = id_K$ erfüllt. Die Fortsetzung $\tilde{\sigma}$ aus dem Satz ist im allgemeinen nicht eindeutig.

Beweis des Satzes. Betrachte die Menge

$$P = \big\{(Z,\tau) \,\big|\, K \subset Z \subset L \text{ Teilkörper und } \tau : Z \to M \text{ Fortsetzung von } \sigma\big\} \ .$$

Da $(K,\sigma) \in P$, ist P nicht leer. Auf P definiere die Teilordnung „$\leq$" durch

$$(Z,\tau) \leq (Z',\tau') \ :\Leftrightarrow \ Z \subset Z' \text{ und } \tau'|_Z = \tau \ .$$

Sei $T \subset P$ total geordnet. Ist T leer, so ist jedes Element von P eine obere Schranke. Sei nun $T \neq \emptyset$. Setze $X := \bigcup_{(Z,\tau)\in T} Z$. Definiere $\varphi : X \to M$ wie folgt. Für $x \in X$ wähle ein $(Z,\tau) \in T$ mit $x \in Z$ und setze $\varphi(x) := \tau(x)$. Wegen der Totalordnung auf T hängt φ nicht von der Wahl von (Z,τ) ab (Warum?). φ ist ein Körperhomomorphismus, der σ fortsetzt (Warum?). Insgesamt ist (X,φ) Element von P und obere Schranke von T.

Nach dem Zornschen Lemma enthält P ein maximales Element (Y,μ).

Wir zeigen nun, dass $Y = L$. Dann ist $\tilde{\sigma} := \mu$ eine mögliche Fortsetzung von σ und der Satz ist bewiesen.

Angenommen, $Y \subsetneq L$. Dann gibt es $a \in L \setminus Y$. Da L/K als algebraisch vorausgesetzt wurde, ist $a \in L$ algebraisch über K und somit auch über Y. Sei $m_{a,Y}$ das Minimalpolynom von a über Y. Sei $\mu_* : Y[X] \to M[X]$ der von μ induzierte Ringhomomorphismus (Kapitel 2.6). Da M algebraisch abgeschlossen ist, hat $\mu_*(m_{a,Y})$ eine Nullstelle in M. Nach 3.2, Satz 7 gibt es eine Fortsetzung von $\mu : Y \to M$ auf $\tilde{\mu} : Y(a) \to M$.

Per Konstruktion gilt $(Y(a),\tilde{\mu}) \in P$ und $(Y,\mu) \leq (Y(a),\tilde{\mu})$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von (Y,μ). $\square$